Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XII-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2017

CLASA a VI-a

Subiectul 1.

a) Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$, cu $a \neq c$, care au proprietatea că atât $\overline{abc}$ cât și $\overline{cba}$ sunt divizibile cu 7.

b) Arătați că nu există numere naturale de forma $\overline{abc}$, cu $a \neq c$, care au proprietatea că atât $\overline{abc}$ cât și $\overline{cba}$ sunt divizibile cu 17.

Subiectul 2.

Fie $A = \{x \in \mathbb{N} / x = \overline{abcde}, \text{unde } a, b, c, d, e \text{ sunt cifre pare, distincte două câte două, în baza } 10\}$. Determinaţi:

a) Cardinalul mulțimii $B = \{x \in A/4 \text{ divide } x\}$;

b) Mulțimea $A \cap C$, unde $C = \{x \in A/\ x = t^2, t \in \mathbb{N}\}$.

Subiectul 3. Fie $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$ două unghiuri complementare, neadiacente și necongruente. Determinaţi măsura unghiului format de bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOC$ cu semidreapta [OB, știind că măsura suplementului unghiului ce are măsura egală cu diferența măsurilor celor două unghiuri complementare și neadiacente este de 122°.

Notă:

1) Timp de lucru 2 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

COLEGIUL NAŢIONAL
„VASILE LUCACIU”
BAIA MARE

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XI-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2017

CLASA a VI-a

Subiectul 1.

a) Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$, cu $a \neq c$, care au proprietatea că atât $\overline{abc}$ cât și $\overline{cba}$ sunt divizibile cu 7.

b) Arătați că nu există numere naturale de forma $\overline{abc}$, cu $a \neq c$, care au proprietatea că atât $\overline{abc}$ cât și $\overline{cba}$ sunt divizibile cu 17.

Soluţie: a) Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $a > c$

$7|\overline{abc}$ și $7|\overline{cba} \Rightarrow 7|99(a-c)$ 1p

$7 \nmid 99 \Rightarrow 7|(a-c) \Rightarrow a = 9, c = 2$ sau $a = 8, c = 1$ 1p

Pentru $a = 9, c = 2 \Rightarrow \overline{9b2} = 7 \cdot 128 + 7b + 6 + 3b$ și $7|\overline{9b2} \Rightarrow 7|6 + 3b \Rightarrow b = 5$ 1p

Pentru $a = 8, c = 1 \Rightarrow \overline{8b1} = 7 \cdot 114 + 7b + 3 + 3b$ și $7|\overline{8b1} \Rightarrow 7|3 + 3b \Rightarrow b = 6$ 1p

Numerele sunt 952, 259, 861,168 1p

b) $17|99(a-c) \Rightarrow 17|(a-c)$ 1p

a,c cifre distincte $\Rightarrow 17 \nmid (a-c)$ 1p

Subiectul 2.

Fie $A = \{x \in \mathbb{N} / x = \overline{abcde}$, unde a, b, c, d, e sunt cifre pare, distincte două câte două, în baza $10\}$.
Determinaţi:

a) Cardinalul mulțimii $B = \{x \in A / 4$ divide $x\}$;

b) Mulțimea $A \cap C$, unde $C = \{x \in A /\ x = t^2, t \in \mathbb{N}\}$.

Soluţie: a) Dacă $d = 0$ sau $e = 0$ atunci $(d, e) \in \{(0,4); (0,8); (2,0); (4,0); (6,0); (8,0)\}$ 1p

Pentru fiecare pereche, celelalte 3 cifre se pot alege în 6 moduri deci avem 36 de numere 1p

Dacă $d \neq 0$ și $e \neq 0$ atunci $(d, e) \in \{(2,4); (2,8); (4,8); (6,4); (6,8); (8,4)\}$

Cum $a \neq 0$ pentru fiecare pereche, celelalte 3 cifre se pot alege în 4 moduri deci avem 24 de numere 1p

Card(B)=60 1p

b) Suma cifrelor oricărui element din A este 20.

Din $x - S(x) \vdots 9$, unde $S(x)$ reprezintă suma cifrelor numărului natural x⇒orice element din A este de forma $M_9 + 2$ 2p

Cum orice pătrat perfect este de forma $M_9, M_9 + 1, M_9 + 4, M_9 + 7 \Rightarrow A \cap C = \emptyset$. 1p

Subiectul 3. Fie $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$ două unghiuri complementare, neadiacente și necongruente. Determinaţi măsura unghiului format de bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOC$ cu semidreapta [OB, știind că măsura suplementului unghiului ce are măsura egală cu diferența măsurilor celor două unghiuri complementare și neadiacente este de 122°.

Soluţie: Fie $m(\sphericalangle AOB) = x;\ m(\sphericalangle AOC) = y$, [OM bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOC$

Caz I. $x < y$

$x + y = 90^\circ, 180^\circ - (x - y) = 122^\circ \Rightarrow x = 16^\circ, y = 74^\circ$ 2p

$m(\sphericalangle MOB) = m(\sphericalangle MOA) - m(\sphericalangle AOB) = \frac{y}{2} - x = 37^\circ - 16^\circ = 21^\circ$ 2p

Caz II. $x > y$

$x + y = 90^\circ, 180^\circ - (y - x) = 122^\circ \Rightarrow x = 74^\circ, y = 16^\circ$ 2p

$m(\sphericalangle MOB) = m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COM) = x - y + \frac{y}{2} = x - \frac{y}{2} = 74^\circ - 8^\circ = 66^\circ$ 1p

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro
COLEGIUL NATIONAL VASILE LUCACIU